

УДК 681.391

## Применение каскадных самоортогональных кодов в каналах связи со стираниями

© Авторы, 2019

© ООО «Издательство «Радиотехника», 2019

**В.В. Золотарёв** – д.т.н., профессор, ст. науч. сотрудник,  
Институт космических исследований РАН (Москва)

E-mail: zolotasd@yandex.ru

**Н.Н. Гринченко** – к.т.н., доцент, кафедра ЭВМ,  
Рязанский государственный радиотехнический университет

E-mail: grinchenko\_nn@mail.ru

**Г.В. Овечкин** – д.т.н., доцент, профессор, кафедра «Вычислительная и прикладная математика»,  
Рязанский государственный радиотехнический университет

E-mail: g\_ovechkin@mail.ru

### Аннотация

**Постановка проблемы:** рассмотрены многопороговые алгоритмы декодирования самоортогональных кодов для каналов со стираниями, реализующие оптимизационные методы коррекции ошибок на основе поиска глобального экстремума функционалов в дискретных пространствах.

**Цель:** для повышения эффективности восстановления стираний предложены каскадные коды, состоящие из внутренних самоортогональных кодов и простых для декодирования внешних кодов, таких как коды с контролем четности, коды Хэмминга или малоизбыточные коды БЧХ.

**Результаты:** показано, что за счет использования предложенных кодов удается обеспечить эффективное восстановление стираний при работе вблизи пропускной способности канала при линейной сложности декодера.

**Практическая значимость:** ...

### Ключевые слова

*Помехоустойчивое кодирование, самоортогональные коды, коды с контролем четности, коды Хэмминга, коды БЧХ, каскадные коды, многопороговые декодеры, восстановление стираний.*

Работа выполнена в РГРТУ при поддержке РФФИ (грант № 18-07-00525).

Большой объем дополнительной информации о МПД представлен на наших двуязычных веб-сайтах [17].

DOI: 10.18127/j00338486-201905-xx

### Введение

Помехоустойчивое кодирование широко используется в телекоммуникационных системах для исправления возникающих при передаче данных ошибок [1]. За последние десятилетия были разработаны эффективные методы кодирования и простого декодирования помехоустойчивых кодов, обеспечивающие работу вблизи пропускной способности ряда типичных моделей каналов связи, включая модель канала связи со стираниями [1]. Несмотря на свою простоту, такая модель подходит для применения при моделировании компьютерных сетей, систем хранения данных и многих других систем. Кроме этого, декодеры для такой модели канала оказываются вычислительно проще декодеров для каналов с ошибками. Поэтому в высокоскоростных системах передачи и особенно хранения данных приемник вместо применения сложного алгоритма исправления ошибок некоторым образом, например, используя контрольные суммы, «стирает» отдельные ненадежные символы или даже целые блоки и в дальнейшем их восстанавливает с помощью декодера помехоустойчивого кода. Отметим, что для такого канала в настоящее время известны коды и методы их декодирования, достигающие в пределе его пропускной способности [2–4]. Но при конечной длине кода их эффективность не всегда оказывается наилучшей, и вычислительная сложность декодера так же является остаточной большой.

На сегодняшний день одними из лучших с точки зрения соотношения эффективности и сложности реализации методов, восстанавливающих стирания, являются многопороговые декодеры (МПД) [5...9] самоортогональных помехоустойчивых кодов (СОК), являющиеся развитием порогового декодера Мессис [10]. Данный метод с линейной вычислительной сложностью обеспечивает близкое к оптимальному декодирование правильно выбранных СОК в достаточно большом диапазоне параметров кодов и канала [11].

Цель работы – рассмотреть возможности МПД в каналах связи со стираниями и предложить подходы для дополнительного улучшения их эффективности.

### Повышение эффективности многопороговых декодеров в канале со стираниями

Работа кодера СОК и их МПД для двоичных и символьных каналов с ошибками достаточно подробно описывается в работах [5, 7, 12]. В канале со стираниями алгоритм работы кодера не изменяется. Работа многопорогового декодера, способного исправлять стирания, в таком канале заключается в следующем [5, 11]. При вычислении символов синдрома стертые информационные и проверочные символы на значение символов синдрома не влияют. Для каждого символа синдрома запоминается число стертых информационных и проверочных символов, принимающих участие в его формировании. В процессе декодирования стертых информационных символов среди относящихся к нему символов синдрома ищется такой, в формировании которого участвовал только один стертый символ. По значению данного символа синдрома и восстанавливается декодируемый стертый информационный символ, при этом также необходимо изменить значения относящихся к нему символов синдрома и уменьшить на единицу число стертых символов, участвующих в их формировании. Далее осуществляется переход к следующему стертому информационному символу. Восстановление стертых информационных символов будет продолжаться либо в течении заданного числа итераций декодирования, либо до тех пор, пока на очередной итерации декодирования не будет сделано ни одного восстановления стертых символов.

Отдельно отметим, что принципы работы МПД при использовании двоичных и многобитовых символов в каналах со стираниями оказываются одинаковыми за тем исключением, что вместо операции сложения по модулю 2 для многобитовых символов используется операция сложения по модулю  $q$ . При этом зависимости вероятности невозможности восстановления символа (двоичного или многобитового) от вероятности стирания символа (двоичного или многобитового) в канале для двоичных и символьных МПД при использовании одинаковых порождающих полиномов совпадают. Поэтому далее для МПД при обсуждении характеристик используются символы, под которыми понимаются как двоичные, так и многобитовые символы.

Эффективность использования МПД в каналах со стираниями подробно обсуждалась в [5, 11]. В данных работах показано, что особенностью МПД и используемых с ними СОК является то, что коды с большим кодовым расстоянием способны обеспечить меньшую вероятность невозможности стирания по сравнению с кодами с меньшим кодовым расстоянием [11]. Но это справедливо для небольшой вероятности стираний в канале. При большой же вероятности стирания оказывается, что коды с большим кодовым расстоянием неспособны их исправить. Это существенно усложняет получение малых вероятностей невозможности стираний при большом шуме в канале. Для решения данной проблемы можно использовать каскадные схемы коррекции ошибок [13, 14], в которых во внутреннем каскаде используется СОК с небольшим кодовым расстоянием, а во внешнем каскаде простой для декодирования высокоскоростной код, например, код с контролем четности, код Хэмминга или код БЧХ. Предполагается, что МПД внутреннего кода будет работать почти как оптимальный декодер и значительно снизит вероятность стирания по сравнению с вероятностью стирания в канале. После этого декодер внешнего кода дополнительно уменьшит вероятность стирания, что обеспечит требуемую вероятность невозможности стирания даже при большой вероятности стирания в канале.

Рассмотрим основные принципы организации каскадной схемы, в которой во внутреннем каскаде используется СОК, декодируемый с помощью МПД, а во внешнем – код с контролем четности, код Хэмминга или код БЧХ (рис. 1). При декодировании такого кода сначала выполняется декодирование СОК с помощью МПД, после чего осуществляется декодирование внешнего кода. Заметим, что данный процесс при декодировании может повторяться многократно, позволяя улучшать решение декодера после каждой итерации.

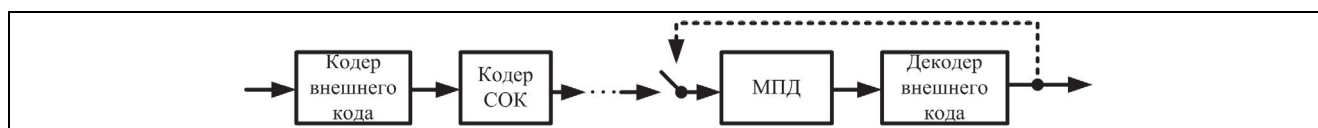


Рис. 1. Схема кодирования и декодирования каскадного кода

Выполним аналитическую оценку эффективности предложенной схемы каскадирования в предположении, что данные коды образуют код-произведение. Пусть во внутреннем каскаде используется СОК с кодовым расстоянием  $d_{in}$ , а во внешнем – код длиной  $n_{out}$  и кодовым расстоянием  $d_{out}$ . Если предположить, что при выбранной вероятности стирания  $P_e$  в канале МПД выполняет близкое к оптимальному декодирование, то вероятность невозстановленного стирания после МПД можно оценить снизу как

$$P_{MTD} = P_e^{d_{in}}. \quad (1)$$

Внешний код с кодовым расстоянием  $d_{out}$  позволяет восстановить  $t = d_{out} - 1$  стираний в блоке длиной  $n_{out}$ . Если в блоке будет больше стираний, то они не восстанавливаются. Следовательно, вероятность невозстановления стирания после декодера каскадной схемы оценивается снизу по формуле

$$P_{out} = \sum_{k=t+1}^{n_{out}} \frac{k}{n_{out}} C_{n_{out}}^k P_{MTD}^k (1 - P_{MTD})^{n_{out}-k}. \quad (2)$$

### Анализ эффективности использования МПД

На рис. 2 представлены зависимости вероятности невозстановления стирания после декодирования от вероятности стирания в стирающем канале связи для различных внешних кодов, полученные с помощью компьютерного моделирования. При этом в качестве внутреннего кода использовался СОК с кодовой скоростью  $R_{in} = 1/2$ , кодовым расстоянием  $d_{in} = 9$  и длиной  $n_{in} = 10200$  бит.

График зависимости вероятности стирания после декодирования внутреннего кода от вероятности стирания в канале показан на рис. 2 кривой 1. Если в качестве внешнего кода используется код с контролем четности длиной 255 символов, восстанавливающий одно стирание, то получаются характеристики, представленные кривой 2. При использовании внешнего кода с контролем четности длиной 32 символа, восстанавливающего одно стирание, получаем кривую 3, при использовании внешнего кода Хэмминга (255, 247), восстанавливающего два стирания, – кривую 4, а при использовании внешнего кода БЧХ (255, 239), восстанавливающего четыре стирания, – кривую 5. Пунктирами на рис. 2 показаны нижние оценки вероятности стирания после декодера, полученные с помощью ранее полученных выражений. Отметим, что за счет применения внешних кодов удается получить на 1...5 десятичных порядков меньшую вероятность невозстановления стираний в области эффективной работы МПД. Так же отметим, что полученные нижние оценки вероятности стирания после декодера для предложенных каскадных схем являются достаточно точными, что позволяет их использовать для оценивания эффективности каскадных схем коррекции ошибок при очень малых целевых вероятностях невозстановления стираний (порядка  $10^{-12}$  и менее), для которых затруднительно применение компьютерного моделирования.

Эффективность лучших известных методов восстановления стираний представлена графиками рис. 3, на котором показаны характеристики лучших низкоплотностных кодов (LDPC) (кривая 1) [3], кодов накопления-повторения-накопления (ARA) (кривая 2) [4], а также известных многопороговых декодеров блочных и сверточных кодов при кодовой скорости  $R = 1/2$  (кривые 3 и 4) [11]. Длина используемого LDPC кода составляет 524288 битов. Длина ARA кода составляет 65536 битов при использовании дополнительного внешнего кода с контролем четности.

Рассмотрим теперь новые результаты в области многопорогового декодирования. Одним из лучших среди построенных авторами блочных кодов является СОК с  $R = 1/2$  с минимальным кодовым расстоянием  $d = 19$ . Его характеристики при 65 итерациях декодирования показаны кривой 5 на рис. 3. Отметим, что достигнуто существенное улучшение эффективности известного блоко-

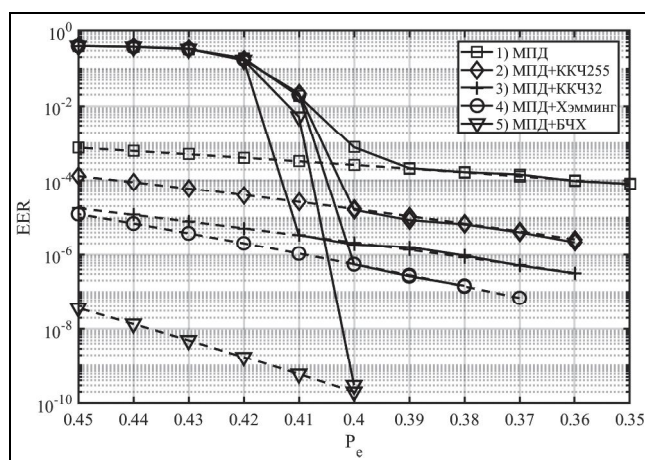


Рис. 2. Графики зависимости вероятности невозстановления стирания после декодирования от вероятности стирания в стирающем канале связи для различных внешних кодов

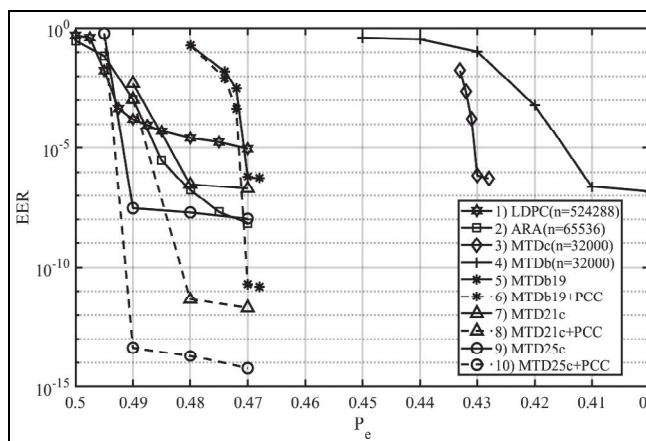


Рис. 3. Графики зависимости вероятности невосстановления стирания после декодирования от вероятности стирания в стирающем канале связи для различных методов при использовании кодов с  $R = 1/2$

$P_s = 3 \cdot 10^{-7}$ . Таким образом, в канале с пропускной способностью  $C = 0,52$  алгоритм МПД даже без использования каскадирования успешно работает при отношении кодовой скорости и пропускной способности  $R/C \sim 0,961$ , что является абсолютно уникальным достижением для процедур восстановления стираний. При использовании такого кода совместно с внешним кодом с контролем четности и итеративного декодера можно при вероятности стирания в канале 0,48 обеспечить вероятность невосстановления стирания менее  $10^{-11}$  (кривая 8). При этом характеристики будут даже несколько лучше характеристик известных методов.

На рис. 3 также представлен еще один полученный авторами за последнее время результат (кривая 9), который соответствует моделированию работы МПД декодера, восстанавливающего стирания с новым кодом при  $R = 1/2$  и  $d = 25$ . Как следует из вида графика, МПД эффективно работает в стирающем канале при вероятности стираний  $P_e = 0,49$ . Это соответствует отношению  $R/C = 50/51 = 0,98$  и достижению вероятности невосстановления стирания порядка  $3 \cdot 10^{-8}$ , что является для прочих методов восстановления стираний неразрешимой задачей. Обсуждаемая схема МПД относится к обычным версиям некаскадных декодеров, активно использующим принцип дивергентности [15], который применялся при построении СОК и при создании декодера несколько раз. Число использовавшихся итераций было при  $P_e = 0,49$  не более  $I = 200$ , а полная задержка решения декодера составила менее 2 млн символов. Поскольку проведенному эксперименту придавалось особенно большое значение, было исследовано и поведение МПД алгоритма в небольшой области вероятностей канала при  $P_e < 0,49$ . Код и алгоритм показали хорошую устойчивость работы в этой буферной области, что подтвердило правильность выбора направления исследований по этой тематике. Для более точного измерения характеристик декодирования в области  $P_e < 0,49$  объем эксперимента был выбран заведомо большим, чем этого требовали статистические критерии, и составил более  $6 \cdot 10^{10}$  информационных символов в каждой из нижних точек графика. Полученные вероятности соответствовали потенциальным возможностям кода с  $d = 25$  при оптимальном декодировании. При использовании внешнего кода с контролем четности с данным кодом и итеративного декодера можно при вероятности стирания в канале 0,49 обеспечить вероятность невосстановления стирания менее  $10^{-13}$  (кривая 10).

Также авторами был получен ряд кодов с более высокой кодовой скоростью, которые оказываются эффективнее известных. В частности, МПД для построенного сверточного СОК с кодовой скоростью  $R = 4/5$  способен эффективно (то есть почти оптимально) восстанавливать стирания при вероятности стирания  $P_e < 0,19$ , то есть так же работал вблизи пропускной способности канала.

Отметим, что при необходимости за счет использования предложенных в проекте каскадных кодов с более мощными внешними кодами (Хэмминга, БЧХ) можно еще уменьшить вероятность невосстановления символа в области эффективной работы МПД, но при этом несколько увеличивается избыточность кода и сложность декодирования.

вого МПД. При использовании с данным кодом внешнего кода с контролем четности длиной 50 символов и итеративного декодера можно при вероятности стирания в канале 0,47 обеспечить вероятность невосстановления стирания немногим более  $10^{-11}$  (кривая 6).

Одним из лучших среди построенных сверточных кодов является СОК с  $R = 1/2$  с минимальным кодовым расстоянием  $d = 21$  и особенно малой зависимостью между решениями при декодировании. Длина кодового ограничения данного кода составляла порядка 200000 символов, при его декодировании выполнялось 100 итераций. Эффективность такого МПД представлена на рис. 3 кривой 7. Отметим, что этот МПД успешно восстанавливает поток стертых символов с вероятностью стираний  $P_e = 0,48$  в канале до уровня вероятности оставшихся невосстановленных символов

### Программная реализация

При создании высокоскоростной программной реализации МПД большое внимание должно уделяться возможности распараллеливания вычислений. На сегодняшний день уже почти все компьютеры потребительского класса оборудованы многоядерными центральными процессорами. Однако наиболее быстрые известные программные реализации МПД для восстановления стираний обеспечивают скорость только порядка 15 МБ/с при использовании шести ядер процессора Core i7 для одновременной параллельной обработки шести принятых блоков. Перспективным направлением для ускорения работы программных версий МПД является их реализация на графических процессорах (GPU) с использованием архитектуры CUDA и языка CUDA C [16]. Отличительной особенностью применения GPU по сравнению с CPU является то, что современные GPU имеют тысячи ядер (современные CPU не более 16), и это позволяет параллельно выполнять несколько тысяч однотипных операций. Одним из основных способов создания быстродействующего декодера на CUDA является размещение в разделяемой и константной памяти всех используемых кодером и декодером массивов и обеспечение бесконфликтного доступа к элементам таких массивов, а также одновременное декодирование нескольких символов внутри одного принятого из канала сообщения используемыми потоками GPU.

Рассмотрим аспекты реализации программной версии МПД с использованием графической карты NVidia GeForce GTX 1060. В результате выполненных работ для СОК с кодовой скоростью  $R = 1/2$ , длиной блока  $n = 1600$  символов и минимальным кодовым расстоянием  $d = 5$  (с проверками, расположенными в позициях 0, 109, 295 и 372) на базе архитектуры CUDA был разработан блоковый МПД, восстанавливающий стирания, используя только регистровые переменные и всего 4,7 Кб разделяемой памяти, которая отводится на хранение данных информационного и синдромного регистров МПД. Это позволяет на каждом из 10 мультипроцессоров (SMM) выполнять одновременное декодирование

$$N_{\text{bl}} = \left\lfloor \frac{\text{sharedPerSMM}}{\text{sharedPerMTDBlock}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{96 \text{ КБ}}{4,7 \text{ КБ}} \right\rfloor = 20 \text{ принятых из канала блоков.}$$

Таким образом, суммарно выполняется одновременное декодирование  $\text{SMMsCount} \cdot N_{\text{bl}} = 10 \cdot 20 = 200$  принятых сообщений. На рис. 4 представлена предлагаемая схема использования мультипроцессора.

Для увеличения скорости декодирования полиномы для используемых СОК были подобраны так, что позиции проверок отстоят друг от друга не менее чем на 50 позиций. Это позволяет при декодировании одного блока использовать 50 потоков для одновременного исправления 50 символов с бесконфликтным обращением и записью в разделяемую память. Схема одновременной работы 50 пороговых элементов МПД для кода с кодовой скоростью  $R = 1/2$ , длиной блока  $n = 1600$  символов и минимальным кодовым расстоянием  $d = 5$  (с проверками, расположенными в позициях 0, 109, 295 и 372) представлена на рис. 5. На первом такте потоки 0, 1, ..., 49 отвечают за декодирование 750, 751, ..., 799 символов информационного регистра. При этом, благодаря синхронизации потоков, всегда происходит обращение только к 50 последовательным символам разделяемой памяти, что не вызывает конфликтов банков памяти. На следующем такте используемые 50 потоков выполняют параллельное декодирование 700, 701, ..., 749 символов информационного регистра и т.д. Таким образом, поток 0 выполняет декодирование 799, 749, 699, ..., 99, 49 символов принятого из канала сообщения, поток 1 – декодирование 798, 748, 698, ..., 98, 48, а поток 49 – декодирование 750, 700, 650, ..., 50 и 0 символов блока МПД.

В таблице представлены результаты оценивания скорости работы декодеров. Как следует из приведенной таблицы, использование предложенных приемов обеспечило общую скорость декодирования для всей системы 270 МБайт/с (более 2 Гбит/с) для кода с  $R = 1/2$ , длиной

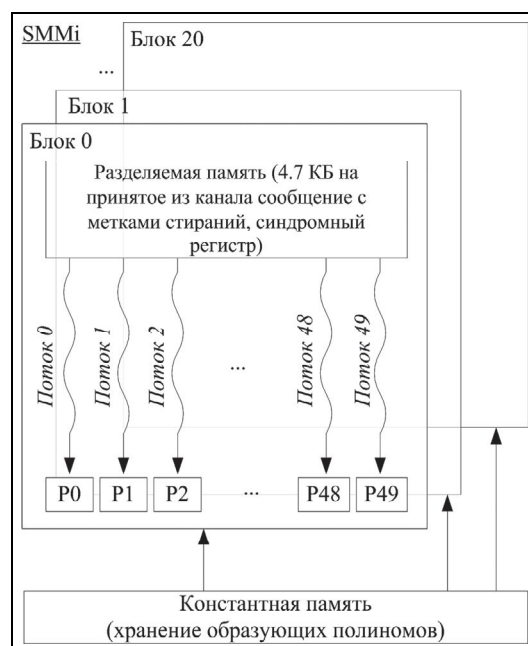


Рис. 4. Схема использования мультипроцессора

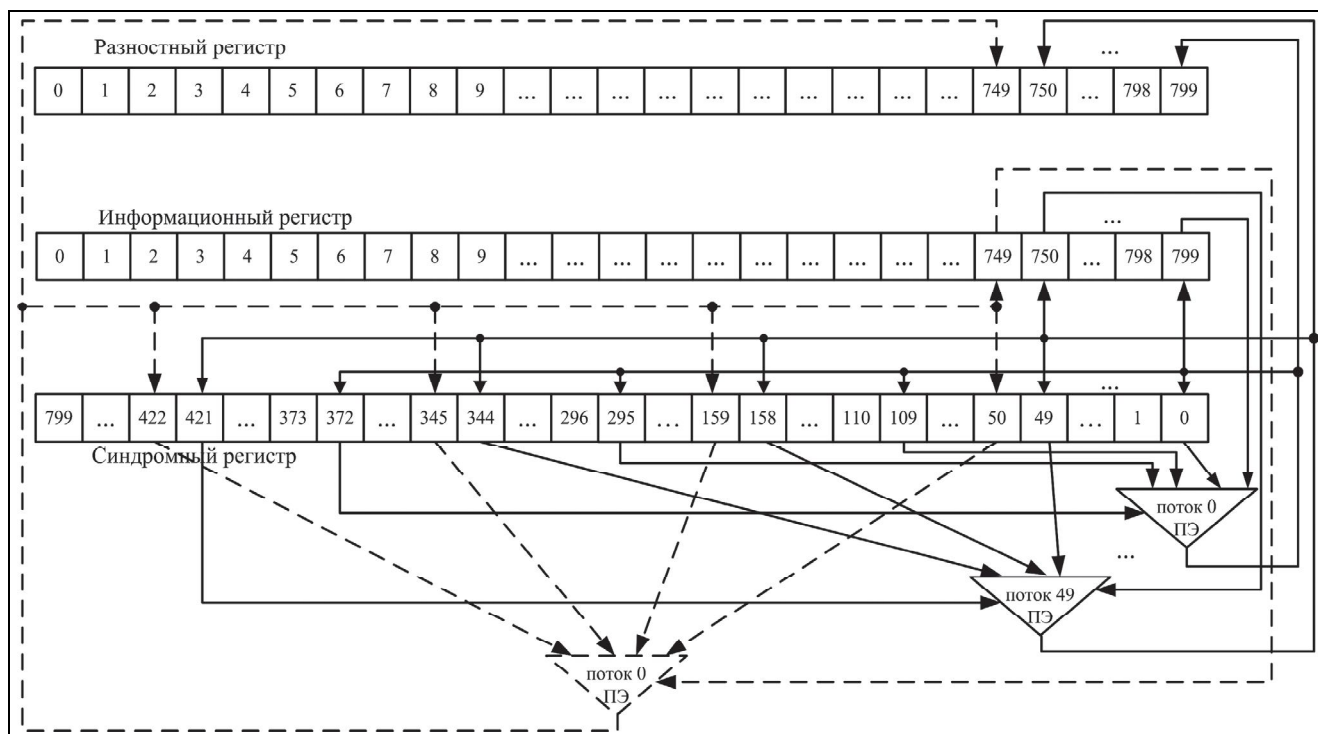


Рис. 5. Схема МПД с использованием 50 параллельных пороговых элементов

блока 1600 символов,  $d = 5$  и 20 итераций декодирования. Для кода длиной 4000 символов,  $d = 9$  при использовании 20 итераций МПД обеспечивает скорость декодирования 150 МБайт/с. Таким образом, программные версии МПД можно использовать в высокоскоростных программно-ориентированных системах на базе графических процессоров.

Таблица. Результаты оценивания быстродействия декодеров

Параметры кода и декодера	Число одновременно декодируемых блоков	Скорость декодирования
$d = 5, n = 1600, it = 20$	200	270 МБайт/с
$d = 7, n = 2200, it = 20$	140	225 МБайт/с
$d = 9, n = 4000, it = 20$	80	150 МБайт/с

### Заключение

Представленные основные результаты разработки простых для реализации и эффективных методов декодирования помехоустойчивых кодов для каналов связи со стираниями могут быть использованы в телекоммуникационных системах и системах хранения данных. Основой разработанных методов коррекции ошибок являлись многопороговые алгоритмы декодирования самоортогональных кодов.

Для повышения эффективности МПД в работе предложены каскадные схемы восстановления стираний, основанные на простых для декодирования внешних кодах и внутренних СОК, использование которых позволяет без существенного увеличения вычислительной сложности на несколько десятичных порядков уменьшить вероятность стирания после декодирования по сравнению с МПД для внутреннего СОК.

### Литература

1. Fossorier M., Declercq D., Biglieri E. and others. Channel Coding: Theory, Algorithms, and Applications. Academic Press Library in Mobile and Wireless Communications, Elsevier. 2014. 690 p.
2. Arkan E. Channel polarization: A method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels // IEEE Trans. Inf. Theory. July 2009. V. 55. № 7. P. 3051–3073.
3. Pfister H.D., Sason I., Urbanke R. Capacity-achieving ensembles for the binary erasure channel with bounded complexity // IEEE Trans. Inform. Theory. 2005. V. 51. № 7. P. 2352–2379.

4. Pfister H.D., Sason I. Accumulate-Repeat-Accumulate Codes: Systematic Codes Achieving the Binary Erasure Channel Capacity with Bounded Complexity // IEEE Transactions on Information Theory. 2005.
5. Золотарёв В.В., Зубарев Ю.Б., Овечкин Г.В. Многопороговые декодеры и оптимизационная теория кодирования / Под ред. академика РАН В.К. Левина. М.: Горячая линия – Телеком. 2012. 238 с.
6. Золотарев В.В., Овечкин Г.В., Чулков И.В., Овечкин П.В., Аверин С.В., Сатыбалдина Д.Ж., Као В.Т. Обзор достижений оптимизационной теории для спутниковых каналов и систем ДЗЗ: 25 лет развития // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2017. Т. 14. № 1. С. 9–24.
7. Золотарёв В.В., Овечкин Г.В., Овечкин П.В. Эффективные многопороговые методы декодирования самоортогональных кодов // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2017. Вып. 60. С. 113–122.
8. Гринченко Н.Н., Золотарев В.В., Овечкин Г.В., Овечкин П.В. Многопороговое декодирование в каналах с многопозиционной модуляцией // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2006. Вып. 19. С. 179–182.
9. Ullah M.A., Omura R., Sato T., Ogivara H. Multi-Stage Threshold Decoding for High Rate Convolutional Codes for Optical Communications // The 7<sup>th</sup> Advanced International Conference on Telecommunications (AICT-2011). 2011. P. 87–93.
10. Мессе Дж. Пороговое декодирование: Пер. с англ. Ю.Л. Сагаловича / Под ред. Э.Л. Блоха. М.: Мир. 1966. 208 с.
11. Grinchenko N., Gromov A., Ovechkin G. Improving performance of multithreshold decoder over binary erasure channel // The 6<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO). 2017. Including ECYPS 2017.
12. Кузнецов Н.А., Золотарёв В.В., Овечкин Г.В., Овечкин П.В. Недвоичные многопороговые декодеры и другие методы коррекции ошибок в символьной информации // Радиотехника. 2010. № 6. С. 4–9.
13. Овечкин Г.В., Овечкин П.В. Использование недвоичного многопорогового декодера в каскадных схемах коррекции ошибок // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2009. Вып. 30. С. 7–12.
14. Овечкин Г.В. Методы улучшения эффективности многопорогового декодера самоортогональных кодов // Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии. 2004. Вып. 14. С. 54–58.
15. Золотарёв В.В., Овечкин Г.В., Овечкин П.В., Эгамбердиев Э. Дивергентное каскадное многопороговое декодирование сверточных кодов // Радиотехника. 2018. № 5. С. 23–29.
16. Золотарёв В.В., Овечкин Г.В., Овечкин П.В. Программная реализация многопороговых декодеров с использованием GPU // Радиотехника. 2016. № 11. С. 90–96.
17. Web sites [www.mtdbest.iki.rssi.ru](http://www.mtdbest.iki.rssi.ru) and [www.mtdbest.ru](http://www.mtdbest.ru).

Поступила 10 апреля 2019 г. **190410@УЛС**