КАСКАДИРОВАНИЕ САМООРТОГОНАЛЬНЫХ КОДОВ ДЛЯ КАНАЛОВ СО СТИРАНИЯМИ

проф. Золотарёв В.В.[1], доц. Гринченко Н.Н.[2], проф. Овечкин Г.В.[2]
[1]Институт космических исследований РАН
[2]Рязанский государственный радиотехнический университет

Рассмотрены многопороговые алгоритмы декодирования самоортогональных кодов для каналов со стираниями, реализующие оптимизационные методы коррекции ошибок на основе поиска глобального экстремума функционалов в дискретных пространствах. Для повышения эффективности восстановления стираний предложены каскадные коды, состоящие из внутренних самоортогональных кодов и простых для декодирования внешних кодов, таких как коды с контролем четности, коды Хэмминга или малоизбыточные коды БЧХ. Показано, что за счет использования предложенных кодов удается обеспечить эффективное восстановление стираний при работе вблизи пропускной способности канала при линейной сложности декодера.

Введение. Помехоустойчивое кодирование широко используется в телекоммуникационных системах для исправления возникающих при передаче данных ошибок [1]. За последние десятилетия были разработаны эффективные методы кодирования и простого декодирования помехоустойчивых кодов, обеспечивающие работу вблизи пропускной способности ряда типичных моделей каналов связи, включая модель канала связи со стираниями [1]. Несмотря на свою простоту, такая модель подходит для применения при моделировании компьютерных сетей, систем хранения данных и многих других систем. Кроме этого, декодеры для такой модели канала оказываются вычислительно проще декодеров для каналов с ошибками. Поэтому в высокоскоростных системах передачи и, особенно, хранения данных приемник вместо применения сложного алгоритма исправления ошибок приемник некоторым образом, например, используя контрольные суммы «стирает» отдельные ненадежные символы или даже целые блоки и в дальнейшем их восстанавливает с помощью декодера помехоустойчивого кода. Отметим, что для такого канала в настоящее время известны коды и методы их декодирования, достигающие в пределе его пропускной способности [2, 3, 4]. Но при конечной длине кода их эффективность не всегда оказывается наилучшей и вычислительная сложность декодера так же является остаточно большой.

На сегодняшний день одними из лучших с точки зрения соотношения эффективности и сложности реализации методов, восстанавливающих стирания, являются многопороговые декодеры (МПД) [5..8] самоортогональных помехоустойчивых кодов (СОК), являющиеся развитием порогового декодера Месси [9]. Данный метод с линейной вычислительной сложностью обеспечивает близкое к оптимальному декодирование правильно выбранных СОК в достаточно большом диапазоне параметров кодов и канала [5]. В данной работе обсуждаются возможности МПД в каналах связи со стираниями и предлагаются подходы для дополнительного улучшения их эффективности.

Улучшение эффективности МПД в стирающих каналах. Работа кодера СОК и их многопорогового декодера для двоичных и символьных каналов с ошибками достаточно подробно описывается в работах [5, 10]. В канале со стираниями алгоритм работы кодера не изменяется. Работа многопорогового декодера, способного исправлять стирания, в таком канале заключается в следующем. При вычислении символов синдрома стертые информационные и проверочные символы на значение символов синдрома не влияют. Для каждого символа синдрома запоминается количество стертых информационных и проверочных символов, принимающих участие в его формировании. В процессе декодирования стертого информационного символа среди относящихся к нему символов синдрома ищется такой, в формировании которого участвовал только один стертый символ. По значению данного символа синдрома и восстанавливается декодируемый стертый информационный символ, при этом также необходимо изменить значения относящихся к нему символов синдрома и уменьшить на единицу количество стертых символов, участвующих в их формировании. Далее осуществляется переход к следующему стертому информационному символу. Восстановление стертых информационных символов будет продолжаться до тех пор, пока на очередной итерации декодирования не будет сделано ни одного восстановления стертого символа.

Отдельно отметим, что принципы работы МПД при использовании двоичных и многобитовых символов в каналах со стираниями оказываются одинаковыми за тем исключением, что вместо операции сложения по модулю 2 для многобитовых символов используется операция сложения по модулю q. При этом зависимости вероятности невосстановления символа (двоичного или многобитового) от вероятности стирания символа (двоичного или многобитового) в канале для двоичных и символьных МПД при использовании одинаковых порождающих полиномов совпадают. Поэтому далее для МПД при обсуждении характеристик используются символы, под которыми понимаются как двоичные, так и многобитовые символы.

Эффективность использования МПД в каналах со стираниями подробно обсуждалась в [5, 10]. В данных работах показано, что из особенностей МПД и используемых с ними СОК является то, что коды с большим кодовым расстоянием способны обеспечить меньшую вероятность невосстановления стирания по сравнению с кодами с меньшим кодовым расстоянием [10]. Но это справедливо для небольшой вероятности стираний в канале. При большой же вероятности стирания оказывается, что коды с большим кодовым расстоянием неспособны их исправить. Это существенно усложняет получение малых вероятностей невосстановления стираний при большом шуме в канале. Для решения данной проблемы можно использовать каскадные схемы коррекции ошибок, в которых во внутреннем каскаде используется СОК с небольшим кодовым расстоянием, а во внешнем каскаде простой для декодирования высокоскоростной код, например, код с контролем четности, код Хэмминга или код БЧХ. Предполагается, что МПД внутреннего кода будет работать почти как оптимальный декодер и значительно снизит вероятность стирания по сравнению с вероятностью стирания в канале. После этого декодер внешнего кода позволит еще существенно уменьшить вероятность стирания, что обеспечит требуемую вероятность невосстановления стирания даже при большой вероятности стирания в канале.

Далее рассмотрим основные принципы организации каскадной схемы, в которой во внутреннем каскаде используется СОК, декодируемый с помощью МПД, а во внешнем – код с контролем четности, код Хэмминга или код БЧХ (рис. 1).

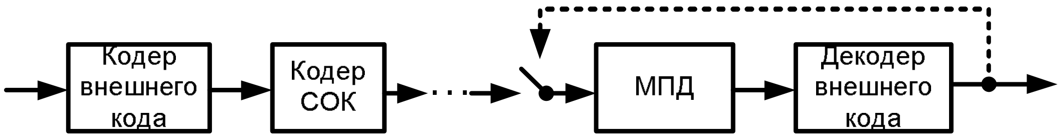

Рисунок 1. Схема кодирования и декодирования каскадного кода

При декодировании такого кода сначала выполняется декодирование СОК с помощью МПД, после чего осуществляется декодирование внешнего кода. Заметим, что данный процесс при декодировании может повторяться многократно, позволяя улучшать решение декодера после каждой итерации.

Выполним аналитическую оценку эффективности предложенной схемы каскадирования в предположении, что данные коды образуют код-произведение. Пусть во внутреннем каскаде используется СОК с кодовым расстоянием d_{in}, а во внешнем – код длиной n_{out} и кодовым расстоянием d_{out}. Если предположить, что при выбранной вероятности стирания P_e в канале МПД выполняет близкое к оптимальному декодирование, то вероятность невосстановленного стирания после МПД можно оценить снизу как

$$P_{MTD} = P_e^{d_{in}} . \tag{1}$$

Внешний код с кодовым расстоянием d_{out} позволяет восстановить $t=d_{\text{out}}-1$ стираний в блоке длиной n_{out}. Если в блоке будет больше стираний, то они не восстанавливаются. Следовательно, вероятность невосстановления стирания после декодера каскадной схемы оценивается снизу как

$$P_{out} = \sum_{k=t+1}^{n_{out}} \frac{k}{n_{out}} C_{n_{out}}^{k} P_{MTD}^{k} (1 - P_{MTD})^{n_{out}-k} . \tag{2}$$

Результаты моделирования. Далее на рис. 2 представлены зависимости вероятности невосстановления стирания после декодирования от вероятности стирания в стирающем канале связи для различных внешних кодов, полученные с помощью компьютерного моделирования.

При этом в качестве внутреннего кода использовался СОК с кодовой скоростью R_{in}=1/2, кодовым расстоянием d_{in}=9 и длиной n_{in}=10200 бит.

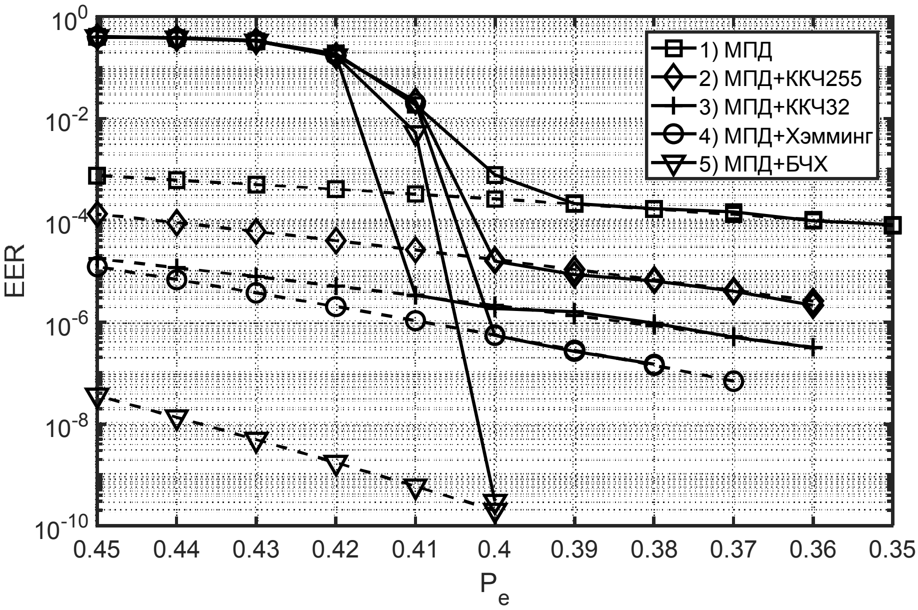

Рисунок 2. Характеристики методов восстановления стираний

График зависимости вероятности стирания после декодирования внутреннего кода от вероятности стирания в канале показан на рис. 2 кривой *1*. При использовании в качестве внешнего кода с контролем четности длиной 255 символов, восстанавливающего одно стирание, получаются характеристики, представленные кривой *2*, при использовании внешнего кода с контролем четности длиной 32 символа, восстанавливающего одно стирание, – кривой *3*, при использовании внешнего кода Хэмминга (255, 247), восстанавливающего два стирания, – кривой *4*, при использовании внешнего кода БЧХ (255, 239), восстанавливающего четыре стирания, – кривой *5*. Пунктирами на рисунке показаны нижние оценки вероятности стирания после декодера, полученные с помощью ранее полученных выражений. Отметим, что за счет применения внешних кодов удается получить на 1..5 десятичных порядков меньшую вероятность невосстановления стираний в области эффективной работы МПД. Так же отметим, что полученные нижние оценки вероятности стирания после декодера для предложенных каскадных схем являются достаточно точными, что позволяет их использовать для оценивания эффективности каскадных схем коррекции ошибок при очень малых целевых вероятностях невосстановления стираний (порядка 10^{-12} и менее), для которых затруднительно применение компьютерного моделирования.

Далее рассмотрим эффективность лучших известных методов восстановления стираний, иллюстрируемую первыми двумя графиками на рис. 3. Здесь показаны характеристики лучших низкоплотностных кодов (LDPC) (кривая *1*) [3], кодов накопления-повторения-накопления (ARA) (кривая *2*) [4], а так же известных многопороговых декодеров блоковых и сверточных кодов при кодовой скорости R=1/2 (кривые *3* и *4*) [10]. Длина используемого LDPC кода составляет 524288 битов. Длина ARA кода составляет 65536 битов при использовании дополнительного внешнего кода с контролем четности.

Далее рассмотрим полученные авторами доклада результаты. Одним из лучших среди построенных нами блоковых кодов является СОК с R=1/2 с минимальным кодовым расстоянием d=19. Его характеристики при 65 итерациях декодирования показаны кривой *5*. Отметим, что достигнуто существенное улучшение эффективности известного блокового МПД. При использовании с данным кодом внешнего кода с контролем четности длиной 50 символов и итеративного декодера можно при вероятности стирания в канале 0,47 обеспечить вероятность невосстановления стирания немногим более 10^{-11} (кривая *6*).

Одним из лучших среди построенных сверточных кодов является СОК с R=1/2 с минимальным кодовым расстоянием d=21 и особенно малой зависимостью между решениями при декодировании. Длина кодового ограничения данного кода составляла порядка 200000 символов, при его декодировании выполнялось 100 итераций. Эффективность такого МПД представлена на графике привой *7*. Отметим, что этот МПД успешно восстанавливает поток стертых символов с вероятностью стираний P_e=0,48 в канале до уровня вероятности оставшихся невосстановленных символов $P_s=3\cdot10^{-7}$. Таким образом, в канале с пропускной способностью C=0,52 МПД алгоритм даже без использования каскадирования успешно работает при отношении кодовой скорости и пропускной способности R/C~0,961, что является абсолютно уникальным достижением для процедур восстановления стираний. При использовании внешнего кода с контролем четности с таким кодом и итеративного декодера можно при вероятности стирания в канале 0,48 обеспечить вероятность невосстановления стирания менее 10^{-11} (кривая *8*). При этом характеристики будут даже несколько лучшие характеристик известных методов.

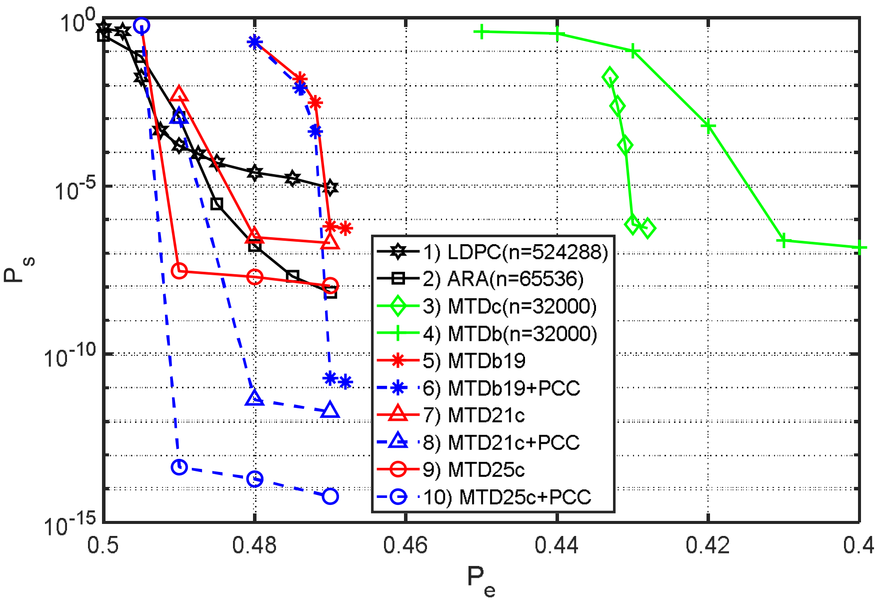

Рисунок 3. Характеристики современных методов восстановления стираний для кодов с кодовой скоростью 1/2

Также представим еще один полученный нашим коллективом за последнее время результат (кривая *9*). Он соответствует моделированию работы МПД декодера, восстанавливающего стирания с новым кодом при R=1/2 и d=25. Как следует из вида графика, МПД алгоритм эффективно работает в стирающем канале при вероятности стираний P_e=0,49. Это соответствует отношению R/C=50/51=0,98 и достижению вероятности невосстановления стирания порядка $3\cdot10^{-8}$, что является для прочих методов восстановления стираний неразрешимой задачей. Обсуждаемая схема МПД относится к обычным ранее описанным версиям некаскадных декодеров, активно использующим принцип дивергентности [11], который применялся при построении СОК и при создании декодера несколько раз. Число использовавшихся итераций коррекции было при P_e=0,49 не более I=200, а полная задержка решения декодера составила менее 2 млн. символов. Поскольку проведенному эксперименту придавалось особенно большое значение, дополнительно было исследовано и поведение МПД алгоритма в довольно небольшой области вероятностей канала при P_e<0,49. Код и алгоритм показали хорошую устойчивость работы в этой буферной области, что подтвердило правильность выбора направления завершающих исследований по этой тематике. Для более точного измерения характеристик декодирования в области P_e<0,49 объем эксперимента был выбран заведомо большим, чем этого требовали статистические критерии, и составил более $6\cdot10^{10}$ информационных символов в каждой из нижних точек графика. Полученные вероятности соответствовали потенциальным возможностям кода с d=25 при оптимальном декодировании. При использовании внешнего кода с контролем четности с данным кодом и итеративного декодера можно при вероятности стирания в канале 0,49 обеспечить вероятность невосстановления стирания менее 10^{-13} (кривая *10*).

Также авторами был получен ряд кодов с более высокой кодовой скоростью, которые оказываются эффективнее известных. В частности, МПД для построенного сверточного СОК с кодовой скоростью R=4/5 способен эффективно (т.е. почти оптимально) восстанавливать стирания при вероятности стирания P_e<0,19, т.е. так же работал вблизи пропускной способности канала.

Отметим, что при необходимости за счет использования предложенных в проекте каскадных кодов с более мощными внешними кодами (Хэмминга, БЧХ) можно еще уменьшить вероятность невосстановления символа в области эффективной работы МПД, но при этом несколько увеличивается избыточность кода и сложность декодирования.

Заключение. В докладе представлены основные результаты разработки простых для реализации и эффективных методов декодирования помехоустойчивых кодов для каналов связи со стираниями, которые могут быть использованы в телекоммуникационных системах и системах хранения данных. Основой разработанных методов коррекции ошибок являлись многопороговые алгоритмы декодирования самоортогональных кодов.

Для повышения эффективности МПД в работе предложены каскадные схемы восстановления стираний, основанные на простых для декодирования внешних кодах и внутренних СОК, использование которых позволяет без существенного увеличения вычислительной сложности на несколько десятичных порядков уменьшить вероятность стирания после декодирования по сравнению с МПД для внутреннего СОК.

Большой объем дополнительной информации о МПД представлен на наших двуязычных веб-сайтах [12]. Результаты получены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №18-07-00525).

Литература

1. Channel Coding: Theory, Algorithms, and Applications [Text] / M. Fossorier, D. Declerq, E. Biglieri and others. – Academic Press Library in Mobile and Wireless Communications, Elsevier, 2014. – 690 p.

2. Arıkan E. Channel polarization: A method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels, IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 55, no. 7, pp. 3051-3073, Jul. 2009.

3. Pfister H.D., Sason I., Urbanke R., Capacity-achieving ensembles for the binary erasure channel with bounded complexity, IEEE Trans. Inform. Theory, 2005, vol. 51, no. 7, pp. 2352–2379.

4. Pfister H.D., Sason I., Accumulate-Repeat-Accumulate Codes: Systematic Codes Achieving the Binary Erasure Channel Capacity with Bounded Complexity, IEEE Transactions on Information Theory, 2005.

5. Золотарёв В. В. Теория кодирования как задача поиска глобального экстремума // Под научной редакцией академика РАН Н. А. Кузнецова. – 2-е изд., испр. – М., Горячая линия – Телеком, 2018, 228 с.

6. Золотарёв В.В., Овечкин Г.В. Эффективные многопороговые методы декодирования самоортогональных кодов // Вестник РГРТУ. – 2017. – №60. – С.113–122.

7. В.В. Золотарев, Г.В. Овечкин, И.В. Чулков, П.В. Овечкин, С.В. Аверин, Д.Ж. Сатыбалдина, В.Т. Као. Обзор достижений оптимизационной теории для спутниковых каналов и систем ДЗЗ: 25 лет развития // "Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса". Москва., 2017. №1, Т.14. С. 9-24.

8. M.A. Ullah, R. Omura, T. Sato, H. Ogivara. Multi-Stage Threshold Decoding for High Rate Convolutional Codes for Optical Communications. AICT 2011: The Seventh Advanced international Conference on Telecommunications, pp. 87-93.

9. Massey J. Threshold decoding. M.I.T. Press, Cambridge, 1963.

10. Grinchenko N., Gromov A., Ovechkin G. Improving performance of multithreshold decoder over binary erasure channel // 6th Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO 2017 - Including ECYPS 2017.

11. Золотарёв В.В., Овечкин Г.В., Овечкин П.В., Эгамбердиев Э. Дивергентное каскадное многопороговое декодирование сверточных кодов / Радиотехника. 2018. № 5. С. 23-29.

12. Веб сайты www.mtdbest.iki.rssi.ru и www.mtdbest.ru.

CONCATENATION OF SELF-ORTHOGONAL CODES FOR ERASURE CHANNELS

Zolotarev V.V.[1], Grinchenko N.N.[2], Ovechkin G.V.[2]
[1]Space Research Institute
[2]Ryazan State Radio Engineering University

Abstract. Multithreshold decoding algorithms for self-orthogonal codes for erasure channels are discussed**.** These algorithms implements optimizing procedures based on global extremum search in discrete space. For improving erasure recovering performance there are offered concatenated codes consisting of inner self-orthogonal codes and simple for decoding outer codes such as parity-check codes, Hamming codes or high-rate BCH codes in this paper. It is shown these codes allows provide effective erasure recovering near channel capacity at linear decoder complexity.